



Perancangan Prediktor Untuk Permasalahan Konsesus Dengan Delay Input Dan Komunikasi Dengan Menggunakan Graf Komplit

Moh. Yasya Bahrul Ulum¹, Trihastuti Agustinah²

^{1,2}Departemen Teknik Elektro, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia

email: ¹yasyabahrululum@gmail.com, ²trihastuti@ee.its.ac.id

INFO ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima 14 Februari 2022
Direvisi 19 Maret 2022
Disetujui 8 Juni 2022
Dipublikasi 8 Juni 2022

Katakunci:

Permasalahan Konsesus
Delay
Prediktor
Graf

Keyword:

Consensus Problems
Delay
Prediktor
Graf

DOI Artikel

10.35891/explorit.v14i1.2933

ABSTRAK

Rancangan prediktor berbasis input delay (dengan bukti) dapat mengkompensasi efek dari delay komunikasi berupa osilasi dan adanya batas kestabilan pada permasalahan konsesus dengan delay input dan delay komunikasi. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana efek penggunaan prediktor berbasis input delay ke sebuah permasalahan konsesus dengan delay. Metode yang digunakan dalam penelitian ini berdasarkan pada konsep partisi graf dapat menjadi beberapa graf yang komplit. Hasil penelitian didapatkan prediktor untuk mengkompensasi delay sepenuhnya menghilangkan efek dari delay melakukan peniadaan komponen dengan delay dengan cara memanipulasi graf agar menjadi graf komplit. Terdapat tiga metode mengkompensasi sepenuhnya delay yaitu walk-based, sequential predictive, dan graf khusus.

ABSTRACT

Predictors design based on input delay (with evidence) can compensate for the effects of communication delays (in the form of oscillations and the existence of stability limits) on consensus problems with input delays and communication delays. This study aims to find out the effect of using input delay-based predictors to a consensus problem with delay. The method used in this study is based on the concept of partitioning graphs into several complete graphs. The results provide analytical evidence that prediction method can be developed to completely eliminate the effects of delay by manipulating the graph into a complete graph. There are three methods; walk-based, sequential predictive, and special graph.

@2022 diterbitkan oleh Prodi Teknik Informatika Universitas Yudharta Pasuruan

1. Pendahuluan

Teori graf adalah cabang matematika yang memiliki aplikasi praktis yang luas. Banyak masalah yang timbul dalam bidang yang beragam seperti psikologi, kimia, teknik industri dan listrik, perencanaan transportasi, manajemen, pemasaran, dan pendidikan dapat diajukan sebagai masalah dari teori grafik. Karena itu, teori grafik tidak hanya merupakan bidang yang menarik dalam dirinya sendiri tetapi juga dasar pemersatu dari mana hasil dari bidang lain dapat dikumpulkan, dibagikan, diperluas, dan disebarluaskan. Tidak seperti bidang ilmiah lainnya, teori grafik memiliki ulang tahun yang pasti. Makalah pertama tentang grafik ditulis oleh matematikawan Swiss Leonhard Euler (1707-1783) dan diterbitkan pada tahun 1736 oleh *Academy of Science* di St. Petersburg. Studi Euler tentang grafik dimotivasi oleh apa yang disebut masalah jembatan Konigsberg.

Permasalahan konsesus adalah salah satu jenis permasalahan dasar pada sistem multi agen [2]-[3]. Pada permasalahan konsesus, setiap agen saling berkomunikasi dan memiliki tujuan dapat berkumpul pada satu titik yang sama. Permasalahan konsesus ini menjadi permasalahan mendasar pada kontrol kooperatif sistem multi agen seperti permasalahan flocking dan kontrol formasi. Beberapa contoh penerapan permasalahan konsesus diantaranya penggunaan jaringan sensor dan formasi pesawat. Pada permasalahan sistem multi agen ini, sekelompok agen dihubungkan oleh sebuah sistem komunikasi sehingga dapat menyelesaikan suatu masalah dimana masalah tersebut tidak dapat diselesaikan apabila ada agen yang tidak bekerja sama [2].

Pada Penelitian [3], menjelaskan bahwa pada permasalahan konsesus dapat divariasikan dalam berbagai asumsi. Salah satunya adalah adanya kekurangan dalam hal komunikasi dalam bentuk delay komunikasi. Adanya delay pada permasalahan konsesus membuat akar Karakteristik sistem menjadi bilangan tidak riil sehingga memunculkan osilasi. Osilasi sendiri meskipun tidak berpengaruh pada laju konsesus namun mengakibatkan energi yang dibutuhkan semakin besar dan apabila diaplikasikan pada kontrol formasi dapat menyebabkan tabrakan antar agen. Semakin besar delay membuat osilasi semakin besar bahkan pada batas tertentu menjadi tidak stabil. Pada nilai tertentu, ada batas maksimal delay yang diperbolehkan agar sistem menjadi stabil.

Adapun permasalahan konsesus paling dasar yang dijelaskan pada Penelitian [3] memiliki solusi yang dapat dirumuskan dalam bentuk persamaan differensial biasa sehingga membentuk sistem linier. Sistem linier dengan delay input dapat menjadi sebuah desain sebuah prediktor berbasis input delay sehingga dapat mengurangi bahkan dapat menghilangkan sifat delay.

Maka dari itu penulis ingin mengetahui bagaimana efek penggunaan prediktor berbasis input delay ke sebuah permasalahan konsensus dengan delay. Terutama pada penelitian [1] yang menggunakan prediksi satu langkah untuk mengkompensasi delay input namun belum untuk delay komunikasi dimana masih bergantung pada hasil penelitian [2].

Pada penelitian ini, penulis ingin menggunakan prediksi dua langkah ataupun tiga langkah untuk mengkompensasi delay input dan delay komunikasi.

2. Metodologi Penelitian

Akan digunakan sejumlah N agen dengan masing-masing agen memiliki plant identik yaitu single integrator dengan delay input τ_{in} . Berikut adalah model agen i

$$\dot{x}_i(t) = u(t - \tau_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{1}$$

Agen-agen tersebut berkomunikasi membentuk graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dimana vertex dari \mathcal{G} menyatakan agen-agen. $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$. Kemudian $(i, j) \in \mathcal{E}$ jika dan hanya jika agen i dan j berkomunikasi. Untuk mempermudah, pasangan agen (i, j) yang dapat berkomunikasi dikatakan berdekatan / adjacent. Agen i dan j yang berkomunikasi memiliki delay dalam penyampaian informasi dari i ke j ataupun dari j ke i sebesar τ_c atau pada bahasan ini disebut delay komunikasi.

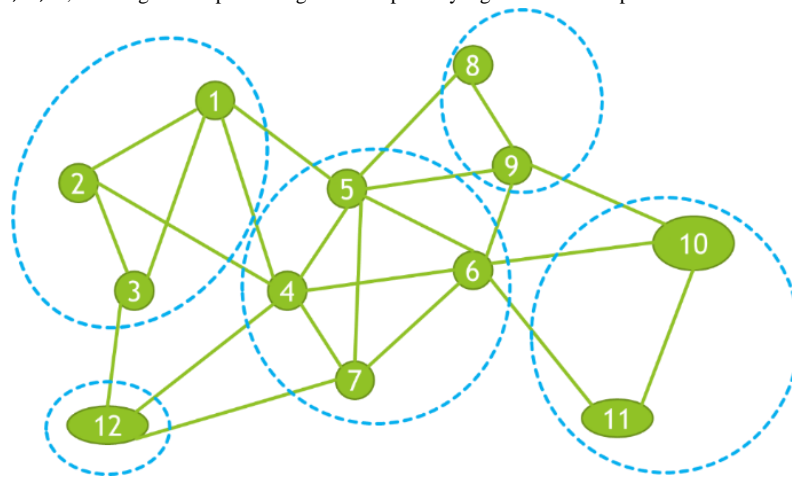
Tujuan dari permasalahan konsensus adalah $\forall i, j \in \mathcal{V}$ memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_j(t) = 0 \tag{2}$$

Pada umumnya, jika tanpa prediktor maka sistem seharusnya seperti yang telah dijelaskan pada Penelitian [3] dimana x merupakan variabel state $N \times 1$ vektor. Matriks $N \times N$ merupakan Matriks Laplacian.

$$\dot{x}(t) = -Lx(t - \tau) \tag{3}$$

Rancangan penyelesaian pada Penelitian ini adalah mempartisi graf menjadi beberapa graf komplit. Misal $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M$ adalah partisi dari \mathcal{G} sedemikian sehingga masing-masing $\mathcal{G}_k \quad k = 1, 2, \dots, M$, adalah graf komplit. Sebagai contoh partisi yang dimaksud ada pada Gambar 1. berikut.



Gambar 1. Contoh lustrasi partisi menjadi graf komplit.

Kemudian didefinisikan pula L_α adalah matriks Laplacian yang hanya memuat semua edge dari $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M$ sedangkan L_β adalah matriks Laplacian yang memuat semua edge selain dari $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_M$. Definisikan agen i dan agen j sekawan apabila terdapat k sehingga $(i, j) \in \mathcal{V}_k$. Misal L adalah matriks Laplacian dari \mathcal{G} maka

$$L_\alpha + L_\beta = L \tag{4}$$

Tanpa mengurangi keumuman misal:

$$L_\alpha = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_M \end{bmatrix} \tag{5}$$

Definisikan K_i adalah Laplacian dari graf komplit \mathcal{G}_i untuk $i = 1, 2, \dots, M$.

Kemudian, nilai L harus dipecah dahulu menjadi L_α dan L_β sebab pembuatan prediksi selalu terdapat matriks e^{-L} . Sementara, elemen-elemen l_{ij} pada L apabila i dan j tidak berkomunikasi maka $l_{ij} = 0$ namun $[e^{-L}]_{ij} \neq 0$ sehingga apabila komunikasi terbatas, maka tidak dapat dilakukan prediksi. Namun pada graf komplit semua agen pada graf tersebut berkomunikasi sehingga dapat dilakukan prediksi. Misal $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$. Berikut persamaan konsensus yang diharapkan:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -L_\alpha \mathbf{x}(t) - L_\beta \mathbf{x}(t - \tau_c) \tag{6}$$

Pada umumnya, prediktor akan bekerja hanya ketika graf mewakili agen, yakni adalah graf komplit. Dalam Penelitian [10] telah dijelaskan cara meningkatkan respon sistem dengan graf komplit gabungan antara koefisien yang tidak tertunda dan koefisien tertunda untuk mengurangi efek delay.

2.1 Perancangan Prediktor

Pada Persamaan (6) masing-masing agen i memerlukan informasi antara lain $L'_{\alpha i} \mathbf{x}(t + \tau_{in})$ dan $L'_{\alpha i} \mathbf{u}_\beta(t)$ dimana $L'_{\alpha i}$ adalah baris ke i matriks $L'_\alpha = e^{-k_\alpha L_\alpha \theta}$. Sehingga untuk mendapatkan Persamaan (6) masing-masing agen i memerlukan informasi semua state x_j pada waktu $t + \tau_{in}$ dimana agen j adalah agen yang sekawan dengan agen i . Maka pada setiap agen i juga harus melakukan prediksi untuk mendapatkan

$$\hat{\mathbf{x}}(t + \tau_{in}) = e^{-k_\alpha L_\alpha \tau_c} \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c) + \int_{-\tau_c}^0 e^{k_\alpha L_\alpha \theta} \left(-k_\beta L_\beta \mathbf{x}(t - \tau_c + \tau_{in} + \theta) \right) d\theta \tag{7}$$

Kemudian hasil dari Prediksi (7) digunakan untuk memprediksi $\mathbf{x}(t + \tau_{in} + \tau_c)$. Misalkan $\hat{\mathbf{x}}$ menyatakan hasil prediksi dua langkah dari \mathbf{x} maka

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t + \tau_{in} + \tau_c) &= \mathbf{e}^{-k_\alpha L_\alpha \tau_c} \hat{\mathbf{x}}(t + \tau_{in}) + \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \theta} \left(-k_\beta \mathbf{L}_\beta \hat{\mathbf{x}}(t + \theta + \tau_{in}) \right) d\theta = \mathbf{e}^{-2k_\alpha L_\alpha \tau_c} \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c) \\ &- \mathbf{e}^{-k_\alpha L_\alpha \tau_c} \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta - \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{e}^{-k_\alpha L_\alpha \tau_c} \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau_c}^0 \int_{-\tau_c}^0 \mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \phi} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{x}(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta + \phi) d\phi d\theta \end{aligned} \tag{8}$$

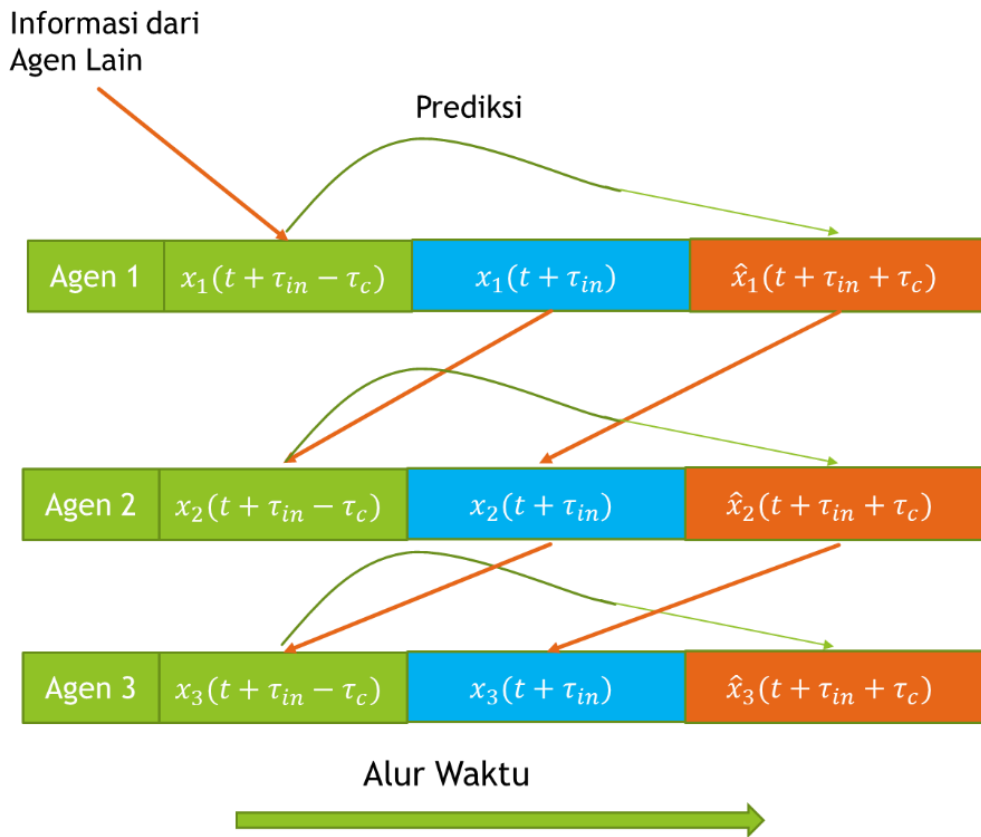
Definisikan kembali $r_{ij}(\theta) = (\mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \theta})_{ij}$ dan $s_{ij}(\theta, \phi) = (\mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \theta} k_\beta \mathbf{L}_\beta \mathbf{e}^{k_\alpha L_\alpha \phi})_{ij}$ untuk mempersingkat persamaan maka pada masing-masing agen melakukan prediksi dua langkah

$$\hat{\xi}_i(t + \tau_{in} + \tau_c) = \sum_{j=1}^N \xi_{ij}$$

Dengan

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= (r_{ij}(-2\tau_c) \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c) \\ &- \int_{-\tau_c}^0 s_{ij}(\theta - \tau_c, 0) \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta \\ &- \int_{-\tau_c}^0 s_{ij}(\theta, -\tau_c) \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c + \theta) d\theta \\ &+ \int_{-\tau_c}^0 \int_{-\tau_c}^0 s_{ij}(\theta, -\tau_c) \hat{u}_{\beta j}(t - \tau_c + \theta + \phi) d\phi d\theta \end{aligned}$$

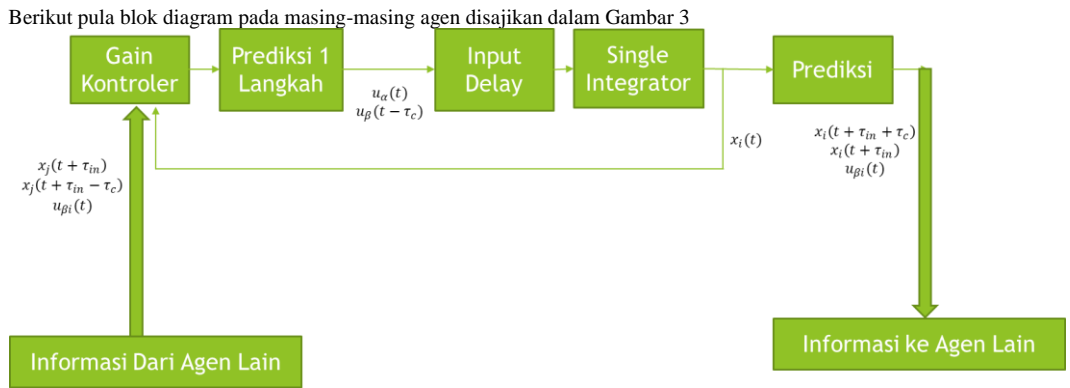
Berikut ilustrasi untuk mempermudah alur prediksi dua langkah pada Gambar 2.



Gambar 2. Alur pengiriman informasi antar agen.

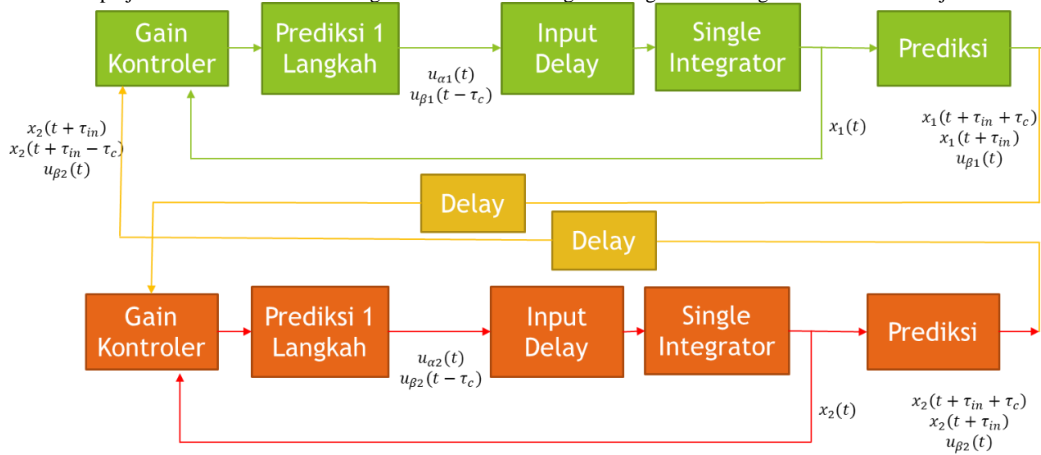
$$\hat{x}_i(t + \tau_{in}) = x_i(t) + \int_{-\tau_{in}}^0 u_{\alpha i}(t + \theta) + u_{\beta i}(t + \theta - \tau_c) d\theta$$

1. Menerima informasi state $\hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c)$ dan $\hat{\hat{x}}_j(t + \tau_{in})$ dari agen yang berdekatan.
2. Memberikan sinyal input $u_{\alpha i}(t) = -k_\alpha \sum_{j=1}^N l_{\alpha ij} \hat{\hat{x}}_j(t + \tau_{in})$.
3. Memberikan sinyal input $u_{\beta i}(t - \tau_c) = -k_\beta \sum_{j=1}^N l_{\beta ij} \hat{x}_j(t + \tau_{in} - \tau_c)$.
4. Melakukan prediksi $\hat{u}_{\beta i}(t) = -k_\beta \sum_{j=1}^N l_{\beta ij} \hat{x}_j(t + \tau_{in})$.
5. Melakukan prediksi dua langkah $\hat{\hat{x}}_i(t + \tau_{in} + \tau_c)$.
6. Mengirimkan informasi $\hat{\hat{x}}_i(t + \tau_{in} + \tau_c)$, $\hat{x}_i(t + \tau_{in})$ dan $u_{\beta i}(t)$ ke agen yang berdekatan dengan agen i .



Gambar Error! No text of specified style in document.. Blok diagram masing-masing agen.

Untuk memperjelas berikut contoh blok diagram untuk sistem dengan dua agen dan saling berkomunikasi disajikan dalam Gambar 3.



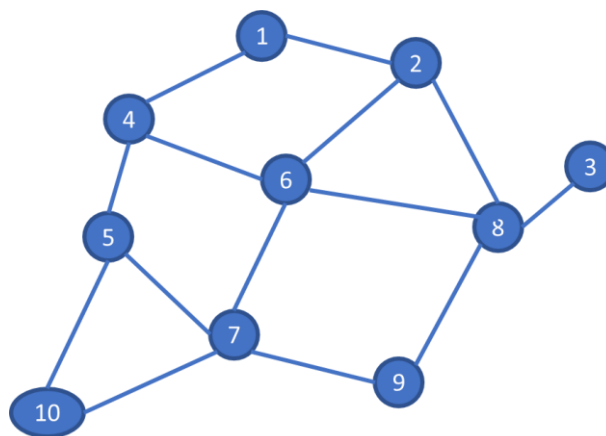
Gambar 4. Blok diagram untuk kasus 2 agen.

Gambar 4 menjelaskan masing-masing agen memiliki model yang sama baik plant (*single integrator*), delay dan prediktor. Prediktor sebelum input masing-masing agen menggunakan prediksi 1 langkah digunakan untuk mengkompensasi input delay. Sedangkan Prediktor pada output menggunakan prediksi 2 langkah dimana hasil state yang terprediksi di kirim ke agen yang lain dan terdapat delay pada pengiriman informasi ke agen yang lain.

3. Hasil Uji Coba Dan Pembahasan

3.1 Deskripsi Data

Penelitian ini menghasilkan metode bagaimana mengkonstruksikan graf lengkap dengan memanfaatkan agen sebagai penghubung informasi. Sebagaimana diketahui bahwa sekelompok agen yang terhubung oleh sistem komunikasi akan memecahkan masalah apabila bekerja sama, sementara jika tidak bekerja sama satu sama lain maka tidak dapat menyelesaikan masalah [9]. Berikut adalah contoh pada graf lengkap yang memanfaatkan agen sebagai penghubung informasi. Pada Gambar 4 terlihat informasi state dari agen 1 bisa disampaikan ke agen 10 dengan melalui agen 4 kemudian 5 kemudian 10.



Gambar 5. Contoh Graf

Sedemikian sehingga apabila semua informasi dari setiap agen terkirim ke setiap agen maka berapapun besar delaynya (*time independent*) akan tetap bisa stabil konsensus dengan respon sistem yang proporsi dengan gain sistem. Graf komplit juga diterapkan pada Penelitian [5] dalam menganalisis

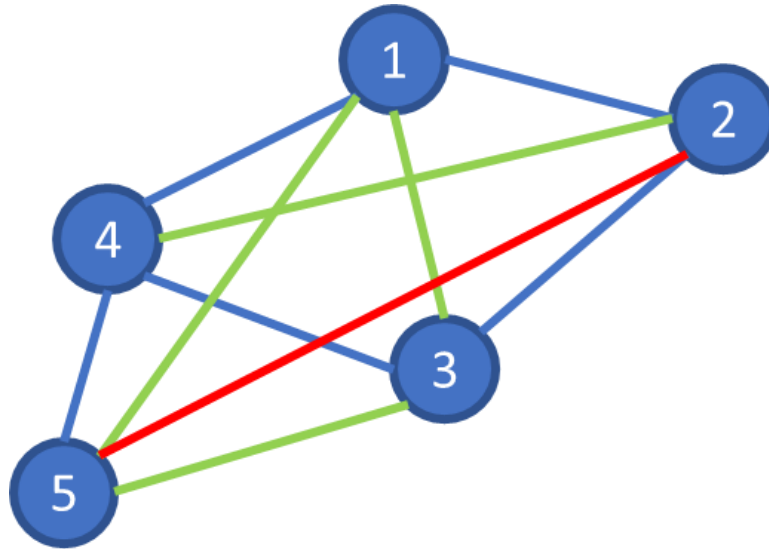
sifat stabilitas sekelompok agen yang berkomunikasi melakukan penyesuaian vektor kecepatan dan mengupayakan kestabilan jarak antar-agen dengan menggunakan aturan interaksi terdekat yang terdesentralisasi, bertukar informasi melalui topologi jaringan yang berubah-ubah.

Berikut merupakan beberapa contoh metode mengkompensasi sepenuhnya delay:

3.1.1 Walk Based

Pada metode ini ide dasarnya adalah mengirimkan nilai state agen melalui perantara agen-agen yang lain. Informasi dari agen i ke agen j disampaikan melalui walk terdekat dari i ke j . Sedemikian sehingga masing-masing state perlu menyimpan agen yang lain dan apabila delay komunikasi antar agen adalah τ maka delay pengiriman informasi ke semua agen adalah $m\tau$ dengan m adalah besar diameter.

Gambar 6 memberikan contoh sederhana bagaimana metode ini bekerja. Pada mulanya agen terhubung melalui edge yang berwarna biru. Sehingga graf mulanya adalah $\mathcal{V} = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{E} = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ dengan delay komunikasi sebesar τ . Maka informasi state dari agen dua dapat dikirimkan ke agen 4 melalui agen 1, begitu pula dari agen 1 ke agen 3, agen 1 ke agen 5 dan agen 3 ke agen 5 dengan delay komunikasi 2τ . Pada Gambar 6 direpresentasikan dalam edge warna hijau. Kemudian agen 2 mengirimkan informasi ke agen 5 melalui perantara agen 1 dan 4 dengan delay 3τ . Diameter pada graf ini adalah 3.



Gambar 6. Contoh pengiriman informasi berdasarkan Walk.

Karena graf merupakan graf lengkap dengan delay 3τ maka untuk graf secara umum dapat dibuat persamaan konsensus

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (9)$$

dan prediksi state

$$\hat{\mathbf{x}}(t + m\tau) = \mathbf{e}^{-2m\mathbf{L}}\mathbf{x}(t - m\tau) \quad (10)$$

untuk kasus khusus pada Gambar 6 memiliki nilai $m = 3$. Nilai $e^{-2m\mathbf{L}}$ dapat dibentuk karena masing-masing agen memiliki state dari semua agen yang ada. Adapun kelemahan dalam metode ini adalah masing-masing agen harus menyimpan state dari setiap agen atau memori masing-masing agen memiliki kompleksitas $O(N)$.

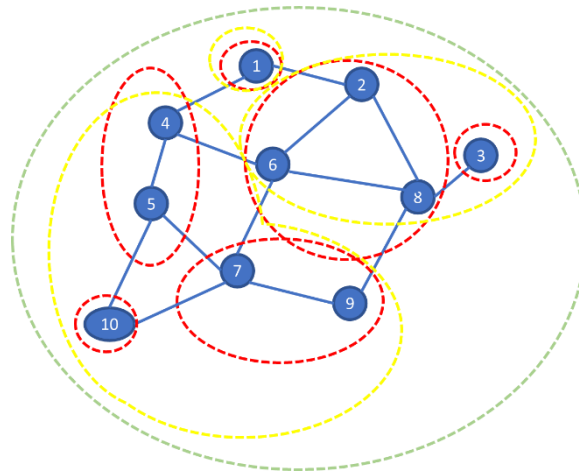
3.1.2 Sequential Predictive

Metode ini adalah kelanjutan dari apa yang dijelaskan pada Bab 3. Yaitu adanya subgraf komplit pada Bab 3 adalah mendapatkan state konsensus dari subgraf tersebut yaitu jumlahan dari setiap state yang ada pada subgraf komplit K_i .

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}, \quad i_1, i_2, i_3, \dots, i_k \in K_i$$

$$\frac{d(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k})}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{|V_i|} \\ 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{L}\mathbf{x} = 0$$

Sehingga nilai tersebut akan konstan apabila tidak ada gaya dari luar subgraf komplit tersebut. Kemudian dibuatlah metode bagaimana membuat dua atau lebih subgraf komplit bertukar consensus state sedemikian sehingga didapatkan state konsensus dari gabungan beberapa subgraf komplit. Berikut ilustrasi dengan Gambar 7 yang menggunakan graf yang sama dengan Gambar 8.



Gambar 7. Ilustrasi Sequential Predictive.

Apabila menggunakan matriks Laplacian L dengan

$$L = \begin{bmatrix} N-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & N-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & N-1 \end{bmatrix}$$

maka

$$e^{-L\theta} = \begin{bmatrix} A_N(\theta) & B_N(\theta) & \dots & B_N(\theta) \\ B_N(\theta) & A_N(\theta) & \dots & B_N(\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N(\theta) & B_N(\theta) & \dots & B_N(\theta) \end{bmatrix}$$

karena $L\mathbf{1}_N = 0$ maka $e^{-L\theta}\mathbf{1}_N = \mathbf{1}_N$ maka

$$A_N(\theta) + (N-1)B_N(\theta) = 1$$

dan karena $L \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix}$ maka $e^{-L\theta} \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix} = e^{-N\theta} \begin{bmatrix} N-1 \\ -\mathbf{1}_{N-1} \end{bmatrix}$ maka

$$(N-1)A_N(\theta) - (N-1)B_N(\theta) = e^{-N\theta}(N-1)$$

$$A_N(\theta) - B_N(\theta) = e^{-N\theta}$$

$$\Rightarrow A_N(\theta) = \frac{1 + (N-1)e^{-N\theta}}{N}, B_N(\theta) = \frac{1 - e^{-N\theta}}{N}$$

sehingga masing-masing agen i dapat menyatakan Persamaan (5.34) dan (5.35) dalam state konsensus $x_1 + \dots + x_n$ dan state agen i sendiri yaitu x_i . Adapun dengan asumsi rata-rata penggabungan beberapa graf adalah dua graf misal G_a dan G_b bergabung menjadi G maka agar konsensus state dari G_a menjangkau semua agen pada G_b diperlukan maksimal sebesar diameter dari G_b atau sebaliknya. Maka apabila $f(G)$ menyatakan banyak walk yang diperlukan untuk mengirimkan informasi state konsensus ke semua agen pada G maka :

$$f(G) \leq \max\{f(G_a), f(G_b)\} + \max\{\text{diam}(G_a), \text{diam}(G_b)\}$$

pada kasus terburuknya :

$$\max\{f(G_a), f(G_b)\} + \max\{\text{diam}(G_a), \text{diam}(G_b)\} \leq f(G - \{v\}) + \text{diam}\{G\} - 1$$

apabila dilakukan secara rekursif maka :

$$f(G) \leq 1 + 2 + 3 + \dots + \text{diam}\{G\} - 1 = O(m^2)$$

dengan salah satu kesamaan terjadi saat graf berbentuk path dan penggabungan antar graf dilakukan 1 per satu. Sehingga apabila delay komunikasi adalah τ maka delay keseluruhan adalah $O(m^2\tau)$ dengan m diameter graf. Adapun apabila menggunakan algoritma *divide and conquer* nilai G_a dan G_b memiliki diameter yang sama dan G_a maupun G_b juga dipartisi dalam 2 graf dengan diameter yang sama dan seterusnya maka nilai $f(G)$ dapat diminimalkan hingga

$$f(G) \leq \text{diam}(G_a) + \text{diam}\left(\frac{G_a}{2}\right) + \dots + \text{diam}\left(\frac{G_a}{2^k}\right) \leq 2\text{diam}(G) = 2m$$

dan memori yang digunakan masing-masing agen adalah $O(\log N)$.

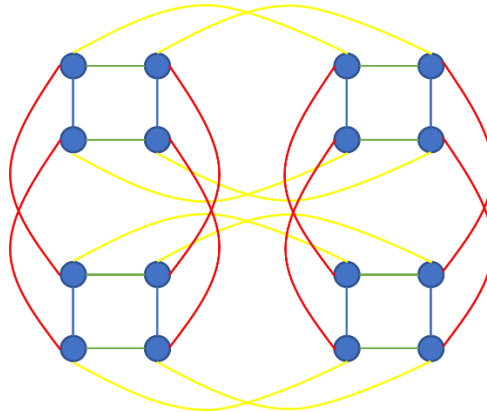
3.1.3 Graf Khusus

Pada Subbab memiliki kelemahan memori $O(N)$ tetapi travel time $O(m\tau)$ dengan m adalah diameter sedangkan pada Subbab 4.10.2 memiliki kelebihan memori yang digunakan maksimal sebesar $O(\log N)$. Pada graf tertentu diameternya bisa sangat besar yaitu mendekati $N - 1$ ditemukan pada graf berbentuk path atau $\frac{N}{2}$ yaitu pada circle. Sehingga pada graf tertentu nilai m bisa sangat kecil. Pada bahasan ini akan dibahas graf yang merupakan Kronecker Product dari beberapa graf komplet.

$$G = K_1 \otimes K_2 \otimes \dots \otimes K_l$$

Karena K_i adalah graf lengkap maka diameternya adalah l dan $N = |K_1| \cdot |K_2| \dots |K_l| \geq 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^l$ maka $l \leq \log_2 N$ atau $l = O(\log N)$. Algoritmanya pun lebih mudah yaitu untuk $j = l, l - 1, \dots, 1$ dengan G_0 adalah sebuah vertex. Masing-masing subgraf berbentuk $G_j = K_1 \otimes K_2 \otimes \dots \otimes K_j$ dipartisi menjadi $|K_j|$ buah subgraf $G_{j-1} = K_1 \otimes K_2 \otimes \dots \otimes K_{j-1}$.

Adapun contoh kasus ini yaitu pada graf *hypercube* yang disajikan pada Gambar 8.



Gambar 8. Hypercube

3.2 Pembahasan Pendekatan Deret Mc Laurin pada Prediktor

Perhatikan Persamaan (9) dan (10), sebenarnya dapat menggunakan pendekatan

$$e^{-2L\tau} = I - 2L\tau + \frac{4L^2\tau^2}{2} - \dots - \frac{(-2L\tau)^n}{n!} = P(-2L\tau)$$

Pendekatan tersebut bersifat naif sehingga akan dibuktikan jika $n < \infty$ maka sistem akan tidak stabil jika $\lambda\tau$ cukup besar dengan λ adalah eigenvalue dari L . Perhatikan dari Persamaan (4.34) dan (4.35).

$$\dot{x}(t) = -L\hat{x}(t) = -LP(-2L\tau)x(t - 2\tau)$$

kemudian, ambil persamaan Karakteristiknya didapatkan :

$$Is = -LP(-2L\tau)e^{-2s\tau}$$

gunakan dekomposisi terhadap eigenvector v maka dengan Cayley-Hamilton karena $xP(-2x\tau)$ adalah polinomial maka :

$$\Rightarrow s = -\lambda P(-2\lambda\tau)e^{-2s\tau} \Rightarrow 2s\tau e^{2s\tau} = -2\lambda\tau P(-2\lambda\tau)$$

dengan lemma pada Subbab 2.1.2 maka agar sistem stabil harus berlaku :

$$\frac{\pi}{2} > -2\lambda\tau P(-2\lambda\tau) > 0$$

Padahal $-2\lambda\tau P(-2\lambda\tau)$ adalah polinom tidak mungkin terbatas di atas dan di bawah. Berikut adalah hasil perhitungan batas $\lambda\tau$ untuk beberapa nilai l agar sistem menjadi stabil

Tabel 1: Batas nilai $\lambda\tau$

l	sup $\lambda\tau$	inf $\lambda\tau$
$l = 1$	sup $\lambda\tau = 0.5$	inf $\lambda\tau = 0$
$l = 2$	sup $\lambda\tau = 0.920343$	inf $\lambda\tau = 0$
$l = 3$	sup $\lambda\tau = 0.798036$	inf $\lambda\tau = 0$
$l = 4$	sup $\lambda\tau = 1.24175$	inf $\lambda\tau = 0$
$l = 5$	sup $\lambda\tau = 1.0903$	inf $\lambda\tau = 0$
$l = 6$	sup $\lambda\tau = 1.58543$	inf $\lambda\tau = 0$

Maka terbukti untuk $n < \infty$ sistem akan tidak stabil jika $\lambda\tau$ cukup besar. Adapun dengan Teorema Cayley-Hamilton pula nilai $e^{-2L\tau}$ dapat dinyatakan dalam berhingga suku, lebih tepatnya N suku.

$$e^{-2L\tau} = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (-2L\tau)^i$$

sehingga dapat direalisasikan menggunakan metode *walk-based* namun sama-sama memiliki memori $O(N)$.

4. Kesimpulan

Pemanfaatan agen sebagai penghubung informasi dapat membantu mengkonstruksikan graf lengkap sebagai prediktor. Rancangan prediktor berbasis input delay (dengan bukti) dapat mengkompensasi efek dari delay komunikasi pada permasalahan konsensus dengan delay input dan delay komunikasi. Metode mengkompensasi delay sepenuhnya yang diuraikan dalam penelitian ini terdapat tiga, yaitu *walk-based*, *sequential predictive*, dan graf khusus. Ketiga metode prediksi menjadi benar-benar menghilangkan efek dari delay (meniadakan komponen dengan delay) dengan cara memanipulasi graf agar menjadi graf komplit.

5. Daftar Pustaka

- [1] D.Jungnickel. Graphs, Networks, and Algorithms vol.5., Leipzig: Springer, 2006.
- [2] B. Zhou and Z. Lin, "Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays," *Automatica*, vol. 50, no. 2, pp. 452–464, 2014.
- [3] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [4] D. Tsubakino, M. Krstic, and T. R. Oliveira, "Exact prediktor feedbacks for multi-input LTI systems with distinct input delays," *Automatica*, vol. 71, pp. 143–150, 2016.
- [5] A. Ramirez and R. Sipahi, "Single-delay and multiple-delay proportional-retarded (PR) protocols for fast consensus in a large-scale network," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 64, no. 5, pp. 2142–2149, 2019.
- [6] M. Mesbahi and M. Egerstedt, "Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks," in Princeton, 2010, pp. 14–60.
- [7] S.-I. Niculescu and K. Gu, "Advances in Time-Delay Systems," in Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, pp. 31–43.
- [8] Fuzhen Zhang, "Matrix Theory," in Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010, Theorem 8.12, pp. 274
- [9] S. Izumi, S. I. Azuma, and T. Sugie, "On a relation between graph signal processing and multi-agent consensus," in *Proc. 55th Conf. Decision and Control*, 2016, pp. 957–961.